Autor: Rodrigo Weber, mestrando do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS).

O comprimento da sombra (y) de um objeto (de altura "x") em um dado horário pode ser calculado a partir de relações trigonométricas simples quando se conhece o ângulo de elevação (ou altura "h") do Sol. Em geral, no entanto, lidamos com a distância zenital (z), que é o complementar da altura solar, isto é: h + z = 90º. Assim, a relação trigonométrica útil para calcular o comprimento da sombra é a seguinte:

$$y = x.tan(z)\,. \tag{1}$$

Para obter a distância zenital, é preciso utilizar simultaneamente os sistemas de coordenada horizontal e equatorial celeste. Sem entrar em detalhes sobre esses sistemas de coordenada (requer conhecimentos sobre trigonometria esférica), a relação útil é a seguinte [1] :

$$cos(z) = sen(\delta_\odot)sen(\Phi) + cos(\delta_\odot)cos(\Phi)cos(H)\,, \tag{2}$$

onde

z - distância zenital;

$\delta_\odot$ - Declinação solar;

Φ - Latitude local;

H - Ângulo Horário.

A declinação solar corresponde a um ângulo medido a partir do equador celeste (essencialmente um plano que corta o equador terrestre) até o Sol. Esse ângulo varia ao longo do ano entre -23,4º e +23,4º devido a inclinação do eixo de rotação da Terra. Assim, por exemplo, no solstício de verão do hemisfério sul a declinação solar vale -23,4º e nos equinócios 0º. Uma relação aproximada para o cálculo desse ângulo para diferentes dias do ano é a seguinte [2]:

$$\delta_\odot = -\,23,44^{o}.cos(\tfrac{360^{o}}{365}.(N+10))\,, \tag{3}$$

onde N é o dia do ano.

Já o ângulo horário (H) pode ser entendido como a distância angular entre o meridiano local e o meridiano onde o Sol se encontra. Por exemplo: quando o Sol se encontra exatamente sobre o meridiano do observador, esse ângulo vale zero graus (H=0º). Quando o Sol se encontra sobre o meridiano de Greenwich, seu ângulo horário para um observador em Porto Alegre seria de -51º = -3,4h, já que cada 15º representa uma hora (a volta completa seria 360º = 24h). Assim, o ângulo horário do Sol é negativo à leste do meridiano local e positivo a oeste.

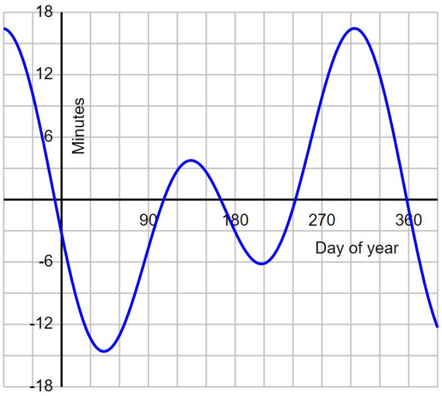
A maior dificuldade consiste em associar o ângulo horário ao horário local. Isso porque a posição solar não é adequada para marcar o tempo, já que sua trajetória não é uniforme no céu ao longo do ano. Assim, é necessário entender conceitos como hora solar verdadeira (H), hora solar média (Hm), hora civil (Hc) e hora legal (Hl). Para uma explanação mais detalhada sobre essas grandezas, recomendo a leitura de [1], porém, resumidamente:

H - É o ângulo horário. Representa a posição do centro do Sol verdadeiro.

Hm - Representa a posição de um sol fictício, que se move ao longo do equador celeste com velocidade angular constante. É necessário a criação desse sol fictício para que todos os dias tenham a mesma duração (24h), de forma que os intervalos de tempo possam ser bem definidos. Para calcular Hm, basta subtrair a chamada equação do tempo (e) da hora verdadeira (H):

$$Hm = H - e. \tag{4}$$

O valor de “e” pode ser calculado com fórmulas aproximadas, ou consultado em tabelas para uma maior precisão [3]. O comportamento da equação do tempo ao longo do ano está expresso no gráfico:



A equação do tempo - Fonte [2]

A figura indica que o Sol médio está defasado em relação ao Sol verdadeiro por até cerca de 16 minutos = 0,26h = 4º. Valores positivos/negativos de “e” indicam que o Sol médio está adiantado/atrasado em relação ao sol verdadeiro.

Hc - A hora civil é definida levando em consideração a convenção horária de que um dia começa (isto é, 0h) quando o Sol cruza o meridiano inferior local (o meridiano diametralmente oposto ao meridiano local). Assim, quando o Sol cruza o meridiano local (Hm ~ 0º), passou-se aproximadamente a metade de um dia (~12h, ou 180º a partir do meridiano inferior). Logo, define-se a hora civil como

$$Hc = Hm + 180º. \tag{5}$$

Hl - A hora legal é a que aparece no relógio oficial do local. Todos os locais compreendidos em um mesmo fuso horário medem o tempo na Hora legal do fuso. A Hl do fuso é definida como a Hora civil (Hc) do seu meridiano central (por exemplo, Porto Alegre se encontra em um fuso cujo meridiano central é -45º, ou -3h). Em termos da Hora civil, localidades geográficas a oeste do meridiano central estão atrasadas em relação ao fuso, enquanto localidades a leste estão adiantadas (assim, Porto Alegre está atrasada em relação ao fuso, pois nossa longitude é -51,2º ou -3,4h). Para determinar a Hora legal (Hl), a posição específica da localidade deve ser "descontada" em relação ao meridiano central do fuso:

$$\text{Hl} = \text{Hc} + (\text{Fuso-Longitude}). \tag{6}$$

Onde "Fuso" é a posição do meridiano central e "Longitude" é a longitude local. Para Porto Alegre, o termo entre parênteses seria: (-3h-(-3,4h))=0,4h ou (-45º-(-51,2º))=6,2º.

Finalmente, juntando as Eqs. 4,5 e 6, podemos calcular o ângulo horário do Sol para uma localidade qualquer da Terra, à qualquer horário local:

$$H = \text{Hl} + e + \text{Longitude} - \text{Fuso} - 180º. \tag{7}$$

Repare que a variável "Fuso" tem que ser corrigida em -1h caso a localidade esteja em horário de verão[1] (por exemplo, se em Porto Alegre fosse horário de verão, o fuso seria -2h, não -3h). Também é importante destacar que a equação do tempo (e) deve ser avaliada no dia em questão.

Passamos a ilustrar a aplicação das relações obtidas no cálculo da sombra de uma vareta de x=1m de altura disposta verticalmente no solo. Suponha que estamos em Porto Alegre, a data em questão é 31/12/2020 e são 14h. Nessa situação,

Hl=14h e = -3m12s = -0,0533h F=-3h 180º=12h Long. = -3,4h

Pela Eq. (7)

$$H=14h+(-0,0533h)+(-3,4h)-(-3h)-12h=1h33m=23,2º.$$

Com o ângulo horário podemos usar a Eq. 2 para obter a distância zenital. Nossos dados são:

$$H = 23,2^o \qquad \delta_\odot = -23,03^o \qquad \Phi = -30^o.$$

Aplicando na Eq. 2:

$$z = cos^{-1}(sen(\delta_\odot)sen(\Phi) + cos(\delta_\odot)cos(\Phi)cos(H))$$

$$z = cos^{-1}(sen(-23,03^o)sen(-30^o) + cos(-23,03^o)cos(-30^o)cos(23,2^o)) = 21,7^o.$$

[1] Em inglês, DST (Daylight Saving Time). Essa informação é importante quando se utiliza algum software de simulação em astronomia de posição.

Com a distância zenital podemos calcular a altura do Sol no horizonte: $h = 90° - z = 90 - 21,7 = 68,3°$. Finalmente, calculamos o comprimento da sombra pela Eq. 1. Nossos dados são:

$$z = 21,7° \qquad x = 1m$$

Aplicando na Eq. 1:

$$y = x.tan(z)$$

$$y = 1.tan(21,7°) = 0,4\ m = 40cm\ .$$

Os resultados obtidos são instantâneos da posição solar (às 14h). Para acompanhar o movimento da sombra ao longo do ano em um local é necessário atualizar diariamente a equação do tempo e a declinação solar. Além disso, em geral o fuso horário muda em determinada época, dependendo do hemisfério da localidade. Em 2020, por exemplo, não foi adotado o horário de verão no Brasil.

OBS: Rigorosamente, o ângulo zenital (z) é influenciado também por uma pequena distorção atmosférica, que chega a ~0,5º para as situações extremas de nascer e ocaso do Sol [4]. Perto do meio dia o efeito é desprezível, sendo esse um horário ideal - em termos de precisão - para realizar qualquer medida no relógio de Sol. Outra fonte de erro na determinação da sombra é o tamanho angular do Sol, que nas equações é considerado como um ponto no seu centro.

Referências

[1] S. Kepler, M. Fátima, Astronomia e Astrofísica (Editora Livraria da Física, São Paulo, 2017).

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Position_of_the_Sun (último acesso: 01/11/2020).

[3] https://www.minasi.com/doeot.htm (último acesso: 01/11/2020).

[4] Van der Werf, Y. Siebren, Ray tracing and refraction in the modified US1976 atmosphere, Applied Optics Vol. 42, No. 3, 20 January 2003.